



① اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

② اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x + 4$ باشند. جواب معادله $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ ، کدام است؟

- (۱) $-1, -7$ (۲) $1, -7$ (۳) $-1, 7$ (۴) $1, 7$

③ اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = [x]$ باشد، بُرد تابع $g \circ f$ کدام است؟ [] علامت جزء صحیح است.

- (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{0\}$ (۳) $\{1\}$ (۴) $\{0, 1\}$

④ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 - 6x + 10$ باشد، مساحت ناحیه محدود بین نمودار تابع $f \circ g$ و خط $y = 2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

⑤ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشد، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ ، کدام است؟

- (۱) $\{(4, 2), (5, 2)\}$ (۲) $\{(4, 2), (3, 5)\}$ (۳) $\{(5, 2), (2, 4)\}$ (۴) $\{(3, 5), (2, 4)\}$

⑥ نمودار تابع $y = |x - 3| - 2$ را در راستای محورهای مختصات یک واحد به سمت بالا و چهار واحد به سمت چپ برده، سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

⑦ مجموعه تمام مقادیر m ، که به ازای آن‌ها معادله $|x^2 - 6x + 8| = m$ دارای چهار جواب متمایز باشد، کدام است؟

- (۱) $m > 0$ (۲) $m > 1$ (۳) $0 < m < 2$ (۴) $0 < m < 1$

⑧ اگر $f(x) = 5x - 10$ و $D_f = [-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $f \circ f$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 2]$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $[-1, \frac{9}{5}]$ (۴) $[\frac{9}{5}, 2]$

⑨ اگر دو تابع $f(x) = 3x - 2$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ مفروض باشند، مقدار $g(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴

۱۵) اگر f تابعی وارون‌پذیر و $f^{-1}(2x+3) = g(x+1)$ باشد، حاصل $(fog)(2)$ کدام است؟
 $(D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = R_f = \mathbb{R}$)

- (۱) ۷
 (۲) ۵
 (۳) -۱
 (۴) -۲

۱۱) اگر $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$ ، $f(x) = \sqrt{x}$ و $(fog)(a) = g(2)$ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ۵

سوال ۱
 گزینه درست: ۴
 کنکور سراسری ۱۳۹۷
 ساده

گزینه ۴

روش اول:

$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$$

$$2x-3=t \xrightarrow{x=\frac{t+3}{2}} f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13$$

$$\rightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

$$\rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

روش دوم: با جای‌گذاری $x=2$ در عبارت داده شده داریم:

$$f(2 \times 2 - 3) = f(1) = 4(2)^2 - 14(2) + 13 = 1 \rightarrow f(1) = 1$$

با بررسی گزینه‌ها، تنها در گزینه «۴» به ازای $x=1$ خروجی برابر ۱ می‌شود. بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

سوال ۲
 گزینه درست: ۱
 خارج از کشور ۱۳۹۷
 متوسط

گزینه ۱

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{2g(x)-1}{g(x)+2} = \frac{2(x+4)-1}{x+4+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = f(x) + 4 = \frac{2x-1}{x+2} + 4$$

$$= \frac{2x-1+4x+8}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$(fog)(x) = (gof)(x) \Rightarrow \frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 7x + 14 = 6x^2 + 7x + 12 \Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -7 \end{cases}$$

سوال ۳

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۵%

ساده

گزینه «۲»

به طور کلی $0 \leq u - [u] < 1$ (به عبارتی برحسب x است)

$$(g \circ f)(x) = g(2x - [2x]) \xrightarrow{0 \leq 2x - [2x] < 1} \circ$$

سوال ۴

گزینه درست: ۴

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۳%

ساده

گزینه «۴»

ابتدا تابع $f \circ g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 6x + 10} - 1$$

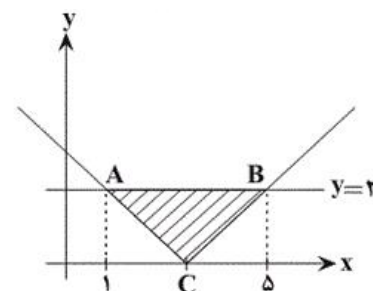
$$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

حال نمودار $(f \circ g)(x) = |x-3|$ را با خط $y=2$ قطع می‌دهیم:

$$|x-3|=2$$

$$\Rightarrow x-3 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

مساحت مثلث ABC : $S_{\triangle ABC} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$



گزینه «۱»

ابتدا f^{-1} را به دست می‌آوریم، برای این منظور، جای مؤلفه‌های اول و دوم را در هر زوج مرتب عوض کنیم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

حال با توجه به تعریف دامنه ترکیب دو تابع داریم:

$$D_{g \circ f^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in D_g\}$$

حال با توجه به دامنه تابع g یعنی $D_g = \{2, 4, 5, 3\}$ داریم:

$$D_{g \circ f^{-1}} = \{4, 5, 6\} \Rightarrow g \circ f^{-1} = \{(4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$$

از طرفی برای دامنه حاصل تقسیم دو تابع داریم:

$$D_{\frac{g}{g \circ f^{-1}}} = D_g \cap D_{g \circ f^{-1}} - \{x \mid (g \circ f^{-1})(x) = 0\} \Rightarrow D_{\frac{g}{g \circ f^{-1}}} = \{4, 5\}$$

با مشاهده دامنه توابع گزینه‌ها، به سادگی به جواب گزینه «۱» می‌رسیم. اما برای محاسبه مؤلفه‌های دوم این تابع نیز داریم:

$$\begin{aligned} \frac{g}{g \circ f^{-1}} &= \left\{ \left(4, \frac{g(4)}{g \circ f^{-1}(4)} \right), \left(5, \frac{g(5)}{g \circ f^{-1}(5)} \right) \right\} \\ &= \left\{ \left(4, \frac{2}{1} \right), \left(5, \frac{3}{2} \right) \right\} \Rightarrow \frac{g}{g \circ f^{-1}} = \{(4, 2), (5, 3)\} \end{aligned}$$

گزینه «۱»

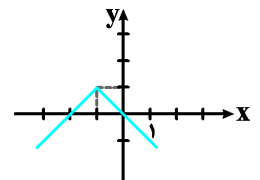
ابتدا با استفاده از انتقال، نمودار جدید را بدست می‌آوریم:

$$y = |x - 3| - 2 \xrightarrow[y \rightarrow (y-1)]{\text{یک واحد به سمت بالا}} y = |x - 3| - 1$$

$$\xrightarrow[x \rightarrow (x+4)]{\text{چهار واحد به سمت چپ}} y = |x + 1| - 1$$

$$\xrightarrow[y \rightarrow (-y)]{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -|x + 1| + 1$$

برای رسم نمودار $y = -|x + 1| + 1$ ، نمودار $y = -|x|$ را یک واحد به بالا و یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم:



مشاهده می‌کنیم که نمودار فوق از سه ناحیه دوم، سوم و چهارم عبور می‌کند.

متوسط

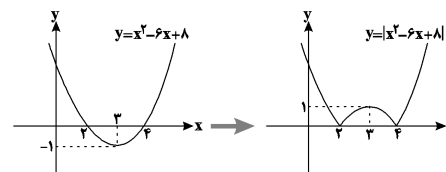
درصد پاسخگویی ۳۱٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

سوال ۷

گزینه «۴»



با توجه به شکل، برای اینکه معادله $|x^2 - 6x + 8| = m$ چهار ریشه متمایز داشته باشد یا به عبارت دیگر خط $y = m$ ، نمودار $y = |x^2 - 6x + 8|$ را در چهار نقطه قطع کند، باید: $0 < m < 4$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۳٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

سوال ۸

گزینه «۴»

$$D_{f \circ f} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_f\}$$

$$= \{x | -1 \leq x \leq 2, -1 \leq 5x - 10 \leq 2\} = \{x | -1 \leq x \leq 2, \frac{9}{5} \leq x \leq \frac{12}{5}\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ f} = [-1, 2] \cap \left[\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right] = \left[\frac{9}{5}, 2\right]$$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۸٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۹

گزینه «۱»

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} \Rightarrow f(g(1)) = \frac{2}{2} = 1$$

حال می‌دانیم $f(g(1)) = 1$ پس داریم:

$$f(g(1)) = 3g(1) - 2 = 1 \Rightarrow 3g(1) = 3 \Rightarrow g(1) = 1$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۷٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۱

گزینه درست: ۲

سوال ۱۰

$$f^{-1}(2x + 3) = g(x + 1) \Rightarrow f(f^{-1}(2x + 3)) = f(g(x + 1))$$

$$\Rightarrow 2x + 3 = f(g(x + 1)) \xrightarrow{x=1} (f \circ g)(2) = 5$$

ساده

درصد پاسخگویی ۳۵٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

سوال ۱۱

ابتدا ضابطه $g(x)$ را بدست می‌آوریم.

$$g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \Rightarrow y = \frac{x+1}{2} \Rightarrow 2y - 1 = x \Rightarrow g(x) = 2x - 1$$

$$g(a) = 2a - 1 \Rightarrow (f \circ g)(a) = f(2a - 1) = g(2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a - 1} = 2 \times 2 - 1 \Rightarrow 2a - 1 = 9 \Rightarrow a = 5$$